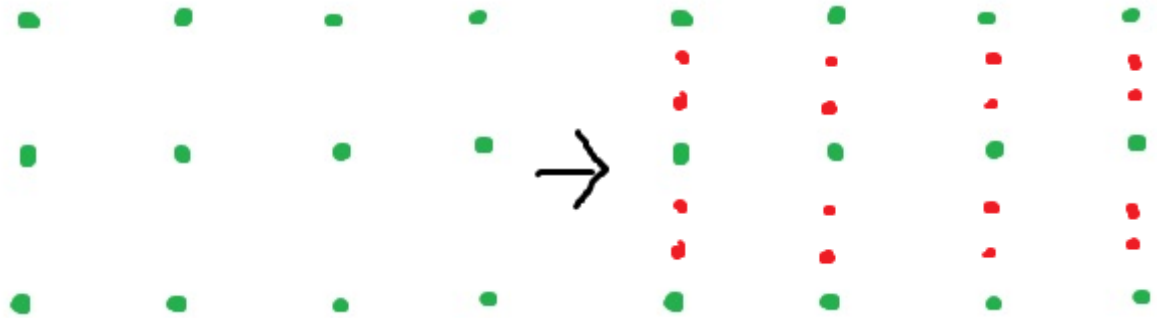
74. Приведите пример экономичной разностной схемы.
75. Напишите схему переменных направлений (схему Письмена-Рэкфорда).
76. Дайте определение однородной разностной схемы.
77. Что такое шаблонные функционалы?
78. Дайте определение консервативной разностной схемы.
79. Приведите пример консервативной разностной схемы.
80. Приведите пример неконсервативной разностной схемы.
81. Какие методы построения консервативной разностных схем вам известны?
82. В чем состоит интегро-интерполяционный метод (метод баланса)?
83. Опишите алгоритм метода конечных элементов.
84. Приведите пример простейшего базиса метода конечных элементов.

Я немного переставлю порядок тем. Сперва мы поговорим о локально однородных системах (ЛОСах), потому что это простая тема, а потом перейдём к схеме Писмена и Рэкфорда.

Некоторые дифференциальные пространственные операторы можно представить в виде $\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z$. Например, надоевший всем оператор Лапласа Δ: там $\Lambda_x[u]=u_{xx}$, $\Lambda_y[u]=u_{yy}$, $\Lambda_z[u]=u_{zz}$.
Оказывается, если в ДУ стоит именно такой оператор, то можно построить локально-однородную схему (ЛОС). Вот была у нас схема

$$\frac{y^{s+1} - y^s}{\tau} = \Lambda[y^s]$$

Введём два промежуточных слоя:
(Если бы задача была бы в 2D, был бы всего один промежуточный слой, а не два).



Важное замечание: если зелёные точки аппроксимируют u в данной точке, то красные ничего не аппроксимируют, они «служебные» - нужны нам для промежуточных шагов. Так что не надо думать, что мы получим втрое большее разрешение по времени.

Значения в промежуточных слоях считаются по формулам:

$$\frac{y^{s+1/3}-y^s}{\tau} = \hat{\Lambda}_1 y^{s+1/3} + \frac{\varphi^s}{3},$$
$$\frac{y^{s+2/3}-y^{s+1/3}}{\tau} = \hat{\Lambda}_2 y^{s+2/3} + \frac{\varphi^s}{3},$$
$$\frac{y^{s+1}-y^{s+2/3}}{\tau} = \hat{\Lambda}_3 y^{s+1} + \frac{\varphi^s}{3},$$

Если мы сложим эти три уравнения, то как раз получим

$$\frac{y^{s+1}-y^s}{\tau} = \Lambda[y^s]$$

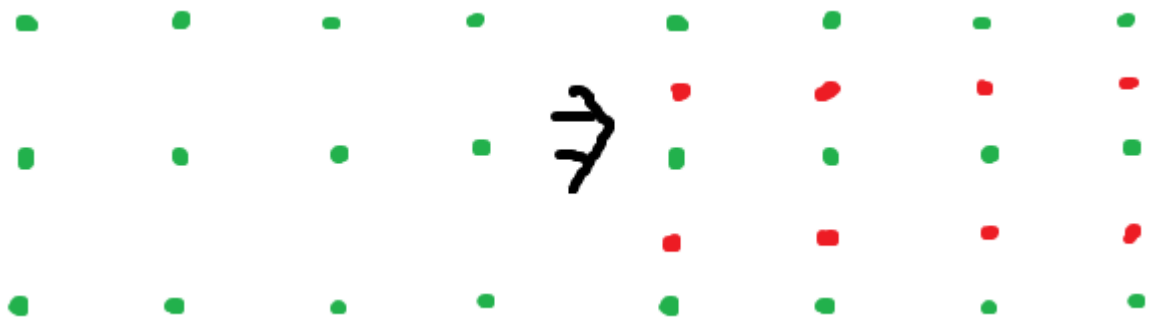
Т.е. мы как бы разбили процедуру подсчёта оператора Λ на три этапа: подсчёт Λ_1 (т.е. u_{xx}), Λ_2 (т.е. u_{yy}), Λ_3 (т.е. u_{zz}).
Только вот все эти Λ_1, Λ_2, Λ_3 являются одномерными операторами, что классно. Поэтому эта схема называется локально одномерной (Локально Одномерная Схема, «ЛОС», так и говорит Боголюбов ☺) Вопроса про ЛОСы нет на экзамене, но их рассказывал Боголюбов и вполне может спросить.

Как мы узнали из Разностных схем-1, мы вынуждены балансировать между
а) явными схемами, у которых беды с устойчивостью, зато мало операций при переходе со слоя на слой - $\mathcal{O}(N)$, где N – число точек на одной строчке.
б) неявными схемами, у которых безусловная устойчивость, но вот число операций будет уже не $\mathcal{O}(N)$, а порядка N^2 (т.к. нам приходится решать СЛАУ из N уравнений).

А нельзя и то, и то одновременно? Можно. Такие схемы называются экономичными. Они безусловно устойчивы, а число операций при переходе на следующий слой $\mathcal{O}(N)$.
Как такая магия возможна? Путём магических трюков, а именно добавления промежуточного слоя. Это схема переменных направлений, она же продольно-поперечная. Была предложена Писменом и Рэкфордом.
Давайте на неё посмотрим!

74. Приведите пример экономичной разностной схемы.

75. Напишите схему переменных направлений (схему Письмена-Рэкфорда).
Писмен и Рекфорд, которые её придумали, добавили промежуточный слой.



Напомню: если зелёные точки аппроксимируют u в данной точке, то красные ничего не аппроксимируют, они «служебные» - нужны нам для промежуточных шагов. Так что не надо думать, что мы получим вдвое большее разрешение по времени.

Сама схема:

$$\frac{y^{s+1/2} - y^s}{0,5\tau} = \hat{\Lambda}_1 y^{s+1/2} + \hat{\Lambda}_2 y^s + \varphi^s,$$

$$\frac{y^{s+1} - y^{s+1/2}}{0,5\tau} = \hat{\Lambda}_1 y^{s+1/2} + \hat{\Lambda}_2 y^{s+1} + \varphi^s$$

(Немного похожа на ЛОС, но отличается!)

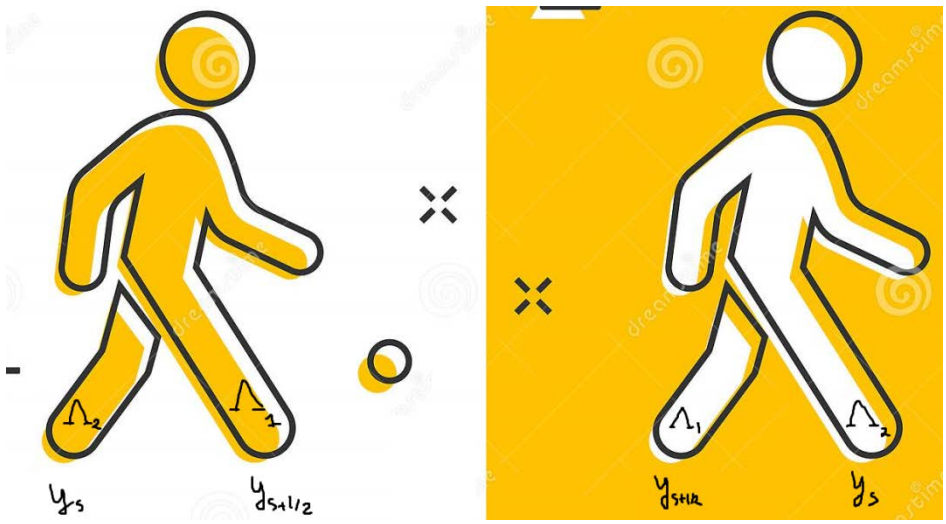
Как она работает? Смотрим сначала на верхнюю строчку, она отвечает переходу со слоя s на слой s+1/2.

Слева – разностная схема производной по времени.

А вот справа интересно. У нас был единый оператор Δu=$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2$, но мы его разделили на $\hat{\Lambda}_1$=u_{xx} и $\hat{\Lambda}_2$=u_{yy}. И $\hat{\Lambda}_1$ действует на $y^{s+1/2}$ (слой, к которому мы переходим, т.е. в духе неявной схемы), а $\hat{\Lambda}_2$ действует на y^s - слой, с которого мы уходим (т.е. уже как явная схема!)

Во второй строчке мы переходим со слоя s+1/2 на слой s. Слева снова разностная схема производной по времени, а справа уже $\hat{\Lambda}_1$ «тормозит», действуя на слой $y^{s+1/2}$, с которого мы уходим, а вот $\hat{\Lambda}_2$ действует на слой y^{s+1}.

Я это сравниваю с ногами при ходьбе. Когда мы переходим со слоя s на s+1/2, $\hat{\Lambda}_1$ действует на новый слой, а $\hat{\Lambda}_2$ на старый, а когда со слоя s+1/2 на s+1, наоборот:



При ходьбе также впереди то одна нога, то другая ☺

Почему эта схема называется схемой переменных направлений? Потому что в роли $\hat{\Lambda}_1$ у нас u_{xx}, а в роли $\hat{\Lambda}_2$ u_{yy}. И направления x и y как бы меняются местами: сперва одно явное, а другое неявное, а потом наоборот.

Отмечу (это любимый вопрос Боголюбова-старшего на экзамене), что схема Писмена и Рэкфорда не апгрейдится на 3D по причине того, что будет там неустойчива (и следовательно, неэкономична).
Проверим: рассмотрим схему

$$\begin{aligned}
\frac{y^{s+1/3}-y^s}{\tau/3} &= \hat{\Lambda}_1 y^{s+1/3} + \hat{\Lambda}_2 y^s + \hat{\Lambda}_3 y^s + \varphi^s, \\
\frac{y^{s+2/3}-y^{s+1/3}}{\tau/3} &= \hat{\Lambda}_1 y^{s+1/3} + \hat{\Lambda}_2 y^{s+2/3} + \hat{\Lambda}_3 y^s + \varphi^s, \\
\frac{y^{s+1}-y^{s+2/3}}{\tau/3} &= \hat{\Lambda}_1 y^{s+1/3} + \hat{\Lambda}_2 y^{s+2/3} + \hat{\Lambda}_3 y^{s+1} + \varphi^s
\end{aligned}$$

Где каждое уравнение будет неявное по одному направлению и явное по двум другим. Но тогда по каждому направлению будет два явных уравнения и одно неявное. Явное приводит к накоплению ошибки, а неявное – к её уменьшению (как говорят, отработке). Получается, мы за цикл два раза копим и один раз отрабатывает – в сумме всё равно копим. Когда было 2D, мы один раз копили и один раз отрабатывали – ошибка не копилась и схема была устойчивой.

76. Дайте определение однородной разностной схемы.

Это схемы, вид которых не зависит ни от выбора конкретной задачи из данного класса, ни от выбора разностной сетки. Дословное определение из Боголюбова. Ни хрена не понятно? Вот мне тоже ☹

78. Дайте определение консервативной разностной схемы

Консервативные разностные схемы – это те схемы, для которых выполняются законы сохранения. Название намекает: «консерво» значит «сохранять» (ну как консервы могут длительно хранить продукты, чтобы они не портились).

Байка от Боголюбова: в 60-х янки позвали академика Самарского «Советский бро, помоги, у нас наша схема глючит!» Тот за 1 ночь помыслил: «Вы использовали неконсервативную схему, вот и получили хрень. Надо юзать только консервативные схемы». Сейчас, если вы придёте на конференцию с неконсервативной схемой, на вас посмотрят, будто вы идиот ☺

Американцев можно понять: построить консервативную схему не всегда просто.
Например, для нелинейного одномерного уравнения теплопроводности

$$[k(x)u'(x)]' - q(x)u(x) = -f(x)$$

это будет

$$\frac{1}{h}\left\{a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right\} - d_i y_i = -\varphi_i$$

Где мы видим некие a_i, d_i, φ_i. Это не абы что, а т.н. шаблонные функционалы, высчитываемые по формулам $d_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)\mathrm{d}x$, $a_i = \left\{\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{\mathrm{d}x}{k(x)}\right\}^{-1}$, $\varphi_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x)\mathrm{d}x.$
Кстати, почему они называются функционалами? Вспомним линал: функционал – это то, что из члена линейного пространства делает число. В данном же случае в роли члена линейного пространства функция (в первом функционале q(x), во втором k(x), в третьем f(x)) – и каждый функционал из своей функции делает число.
Также, возможно, вам знакомы функционалы из теормеха: например, действие есть функционал, сопоставляющей каждой мировой линии из A в B (т.е. функции) действие (т.е. число) – интеграл от плотности функции Лагранжа по этой мировой линии.
Я специально привожу аналогии, чтобы у вас всё в голове утряхивалось!

Тем самым мы ответили на вопросы

79. Приведите пример консервативной разностной схемы.
77. Что такое шаблонные функционалы?

Но от нас могут потребовать и пример неконсервативной разностной схемы

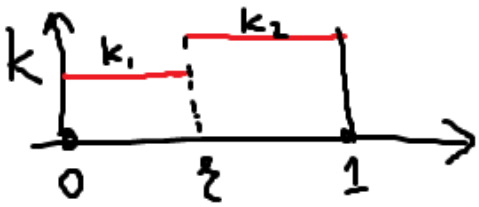
80. Приведите пример неконсервативной разностной схемы.

Вот тут и пригодится пример от пиндосов. Они вот такое решали:

$$\begin{cases} [k(x)u'(x)]' = 0, \quad x \in (0,1); \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Где k(x) имеет такой вид

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & x \in (0, \xi), \\ k_2, & x \in (\xi, 1), \end{cases}$$



Переводим втупую на язык разностных схем. Вот как раз если сделать это втупую, бездумно, по-американски (распишем $(ku')' = ku'' + k'u'$,), то и получим как раз неконсервативную схему

$$k_i \cdot \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1,$$

$$y_0 = 1, \; y_N = 0.$$

На всякий случай: вас могут смущать k_i. Ну, ничего страшного: k(x) – известная функция (в отличие u(x), которую как раз надо найти), но раз в дифуре $(ku')' = ku'' + k'u' = 0$ есть производная k(x), то её надо тоже считать численно, как отношение конечных приращений.

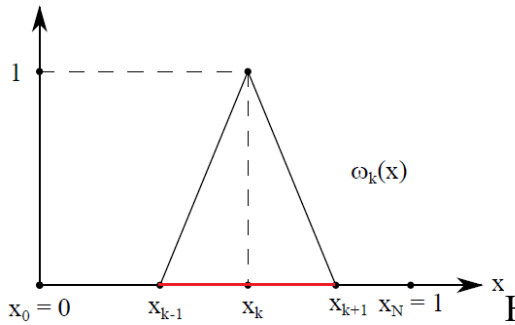
Далее идут три скучных вопроса:

81. Какие методы построения консервативной разностных схем вам известны?
82. В чем состоит интегро-интерполяционный метод (метод баланса)?
83. Опишите алгоритм метода конечных элементов.

82-й и 83-й как раз отвечают на 81-й ☺ Интегро-интерполяционный метод (он же метод баланса) – это наша физфаковская разработка. Метод конечных элементов (МКЭ) – разработка американцев, которую затем подхватили европейцы.

Насчёт 82-го вопроса: метод баланса мы уже разбирали – это метод функционалов, т.е. там, где были $d_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)\mathrm{d}x$, $a_i = \left\{\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\mathrm{d}x}{k(x)}\right\}^{-1}$, $\varphi_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x)\mathrm{d}x.$.

В МКЭ решение ищется в виде разложения по т.н. конечным элементам – базисным функциям $\omega_k(x)$. Среди требований к ним – конечный носитель:



Напомню, что носитель - эта часть оси абсцисс, на которой значение функции не ноль, а слева и справа от него ноль. Например, для функции на рисунке носитель – это красный отрезок.

Вот мы заодно и на 84-й вопрос ответили:

84. Приведите пример простейшего базиса метода конечных элементов.